

*Technische Universität München*

**Ausarbeitung zum**

**Praktikum**

**Wissenschaftliches Rechnen und  
Visualisierung**

Sommersemester 1995

Veranstalter: Prof. Dr. Chr. Zenger

Betreuer: Dr. M. Griebel  
Th. Dornseifer  
T. Neunhoeffer

Bearbeiter: Gordon Cichon  
Tobias Völkl

---

## Die Navier-Stokes-Gleichungen

Das Verhalten inkompressibler viskoser Strömungen läßt sich mit den Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben.

Diese bestehen aus den zwei Impulsgleichungen

$$1. \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y} + g_x$$

$$2. \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + g_y$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Da die Lösung dieser Gleichungen für beliebig vorgegebene Randwerte im allgemeinen nicht analytisch lösbar sind, muß eine Lösung numerisch angenähert werden.

Das Kontinuum der Flüssigkeit wird mit der Methode der finiten Differenzen in Zellen mit endlicher Länge und Breite unterteilt.

Die Werte für den Druck im Zellenmittelpunkt und die Strömungsgeschwindigkeiten an den Zellengrenzen werden in einem versetzten Gitter (staggered grid) gespeichert.

Werden nun auch noch die Ableitungen, die in den Navier-Stokes-Gleichungen auftreten, durch eine Differenzbildung approximiert, läßt sich das Verhalten der Strömung numerisch berechnen.

Das so erhaltene Gleichungssystem mit endlich vielen Unbekannten läßt sich mit den Methoden der Gleichungslösung, z.B. der SOR-Iteration lösen.

Die Vorgehensweise des Computers läßt sich grob so darstellen:

1. Auswahl einer Diskretisierung für Raum ( $\delta x$ ,  $\delta y$ ) und Zeit ( $\delta t$ ).  
Die erstere bleibt während der Simulation gleich, da ein Umrechnen der Druck und Geschwindigkeitswerte auf ein anderes Gitter auf die Genauigkeit und auf den Zeitbedarf sehr negative Auswirkungen hätte. Die Zeitschrittweite kann hingegen problemlos während der Simulation so variiert werden, daß die numerische Stabilität des Verfahrens gewährleistet bleibt.
2. Setzen der Randwerte.  
Um die Strömung eindeutig zu charakterisieren, muß das Verhalten am Rand des Fluidgebietes bestimmt sein. Die Vorgehensweise wird unten noch genauer beschrieben und ist Ansatzpunkt für die Weiterentwicklung des Programms während des Praktikums.
3. Lösen des Gleichungssystems für Druck und Geschwindigkeit im Gitter nach einem Zeitschritt.  
Dieses läßt sich so formulieren, daß es als unbekannte nur Druckwerte am Ende des Zeitschritts enthält. Diese Gleichung der Druckwerte kann nun mit einem beliebigen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme gelöst werden. Als besonders geeignet für diese Problemstellung hat sich die SOR-Iteration erwiesen.
4. Aus den so erhaltenen Druckwerten lassen sich dann die Geschwindigkeiten am Ende des Zeitschritts errechnen.

---

## Die "Driven Cavity"

Das einfachste Verfahren zur Festlegung der Randwerte ist die Festlegung der Fluid-Grenzen auf ein rechteckiges Gebiet.

Das ist zwar eine erhebliche Einschränkung der Anwendungsmöglichkeiten des Simulationsprogramms, aber eine einfache Möglichkeit, mit einer Simulation zu beginnen und mit anderen Problemen, die nicht mit den Randwerten zu tun haben, vertraut zu werden. Die Behandlung allgemeinerer Randbedingungen wird dann Bestandteil der Erweiterung des Programms in Blatt 2 und Blatt 3 werden.

Eine interessante Problemstellung in einer Flüssigkeit mit rechteckiger Ausdehnung ist die "Driven Cavity". Hier ist das Fluid in einem Behälter mit haftenden Wänden eingeschlossen, in dem eine Wand mit konstanter Geschwindigkeit seitwärts gezogen wird.

# Blatt 2

---

## Behandlung weiterer Randbedingungen

Wie schon in Blatt 1 angekündigt, wird die Beseitigung der Einschränkung der Form des Fluids auf ein rechteckiges Gebiet, das mit haftenden Wänden abgegrenzt ist, zentrales Thema des zweiten Blattes.

Für die Grenzen des Fluids sind folgende Randbedingungen denkbar:

1. Haftbedingung  
Die Geschwindigkeit des Fluids am Rand ist null, sowohl in Normal-, als auch in Tangentialrichtung zum Rand.
2. Rutschbedingung  
Die Geschwindigkeit senkrecht zur Wand ist null. Waagrecht zur Wand ist ihre Ableitung senkrecht zur Wand null. Die Flüssigkeit "rutscht" so reibungslos am Rand entlang. Diese Konfiguration ist vor allem zur Behandlung symmetrischer Geometrien geeignet. Dort kann eine Wand mit Rutschbedingung in die Symmetrieachse gelegt werden.
3. Einströmbedingung  
Die Flüssigkeit wird hier hineingepresst. Die Geschwindigkeit am Rand ist fest von außen vorgegeben.
4. Ausströmbedingung  
Die Ableitung der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in Normalenrichtung ist null.

---

## Behandlung allgemeiner Geometrien

Zur Behandlung allgemeiner, nicht rechteckiger Geometrien muß in jeder Zelle des an sich rechteckigen Simulationsgebietes vermerkt werden, ob in dieser Fluid vorhanden ist oder nicht.

In diesem Blatt beschränken wir uns auf die Einführung von festen Hindernissen. Das hindernisfreie Gebiet ist vollständig mit Fluid ausgefüllt.

Dadurch vergrößert sich zwar der buchhalterische Aufwand der Simulation, aber es wird auch möglich, außerordentlich interessante neue Geometrien zu erforschen:

---

## Visualisierung mittels Partikelverfolgung und Streichlinien

Eine andere Art, eine Strömung zu untersuchen, als die Analyse der Geschwindigkeits- und Druckfelder, ist die Verfolgung der Bahn einzelner Partikel innerhalb des Flüssigkeitsgebiets.

Diese Partikel bewegen sich entlang des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung.

Hierbei gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Partikel in die Strömung einzubringen:

1. Bahnlinien  
Die Partikel werden einmal in die Strömung eingebracht.  
Diese Möglichkeit ist dann sinnvoll, wenn es keine oder wenig Ausströmung aus dem Gebiet gibt, und die Partikel somit im simulierten Fluid bleiben. (z.B. Driven Cavity)
2. Streichlinien  
Die Partikel werden in regelmäßigen Zeitabständen an bestimmten Stellen in des Fluid "injiziert".  
Diese Möglichkeit ist sinnvoll, wenn es eine Ein- und eine Ausströmung in und aus dem Flüssigkeitsgebiet gibt, und die Partikel aus der Flüssigkeit hinausgetragen werden. (z.B. Karman'sche Wirbelstraße)

---

## Stromfunktion und Wirbelfunktion

Eine andere Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen läßt sich mit Hilfe der Stromfunktion  $\Psi$ , die definiert ist durch

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v \text{ und } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u,$$

und der Wirbelstärke  $\zeta$ , die definiert ist durch

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

angeben.

Auch sind diese beiden Funktionen hilfreich bei der Interpretation einer Strömung.

Die Wirbelstärke gibt Aufschluß über die Stärke der Verwirbelung des Fluids an einer bestimmten Stelle, d. h. über die Drehung des Fluids um seine eigene Achse.

Die Stromfunktion macht die Strömung des Fluids dadurch anschaulich, daß alle ihre Höhenlinien ( $\Psi = \text{const}$ ) Stromlinien sind, d. h. sie beschreiben den Durchfluß eines imaginären Partikelchens durch das Fluid entlang dieser Linie.